Filtres passe-bas

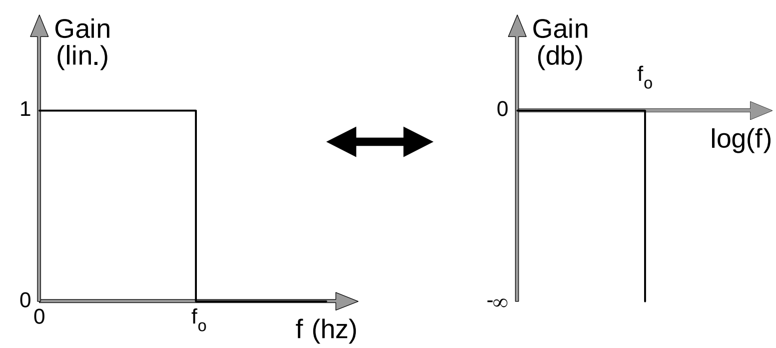
Ce court document expose les principes des filtres passe-bas, leurs caractéristiques en fréquence et leurs principales topologies. Les éléments de contenu sont :

- Définition du filtre passe-bas
- Fonction de transfert et réponse en fréquence
- Topologies courantes
- Filtres passe-bas d'ordres supérieurs
- Filtres anti-alias

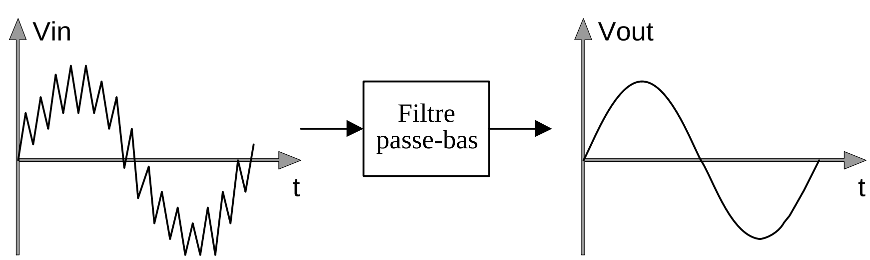
Définition du filtre passe-bas

Le filtre passe-bas est un dispositif qui démontre une réponse en fréquence relativement constante (gain fixe) aux basses fréquences et un gain décroissant aux fréquences supérieures à la fréquence de coupure. La décroissance plus ou moins rapide dépend de l'ordre du filtre.

Idéalement, le filtre passe-bas aurait un gain unitaire (ou fixe) aux basses fréquences et un gain nul aux fréquences supérieures à la coupure « f_o » :



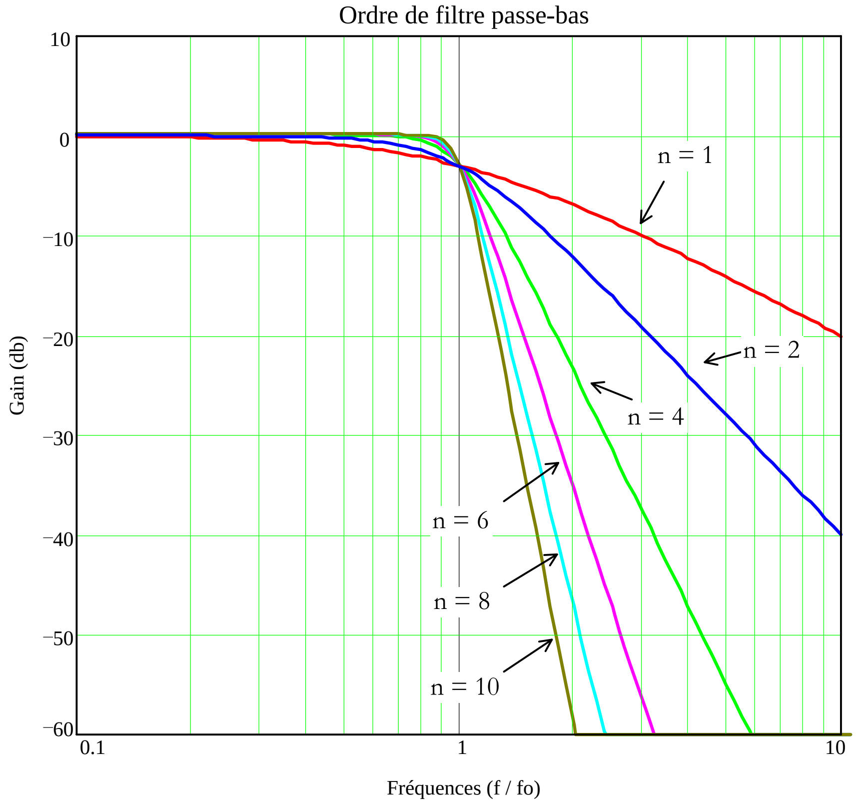
On utilise les filtres passe-bas pour réduire l'amplitude des composantes de fréquences supérieures à la celle de la coupure.



Ordre du filtre

En pratique, il est impossible d'obtenir une caractéristique aussi parfaite que celle illustrée précédemment. En effet, on ne peut que se rapprocher de celle-ci en augmentant l'*ordre du filtre*. Ce dernier correspond grosso modo aux nombres d'étages d'éléments réactifs c.a.d. de composantes dont l'impédance varie avec la fréquence.

On distingue l'ordre du filtre par la pente de réponse en fréquence aux fréquences supérieures à la coupure. Cette pente est de « *n fois -20db/decade* » où « *n* » représente l'ordre du filtre.



Note :

- Une pente de -20db/décade équivaut à une pente de -6db/octave ou un octave correspond à doubler la fréquence.
- $$\boxed{\begin{aligned} db &= 20 \cdot \log(Gain) \\ Gain &= 10^{\frac{db}{20}} \end{aligned}}$$
- Un gain de 0 db correspond à un gain linéaire de 1 (unitaire)
- Un gain > 0db correspond à un gain linéaire > 1 (amplification)
- Un gain < 0db correspond à un gain linéaire < 1 (atténuation)
- Valeurs utiles à retenir :

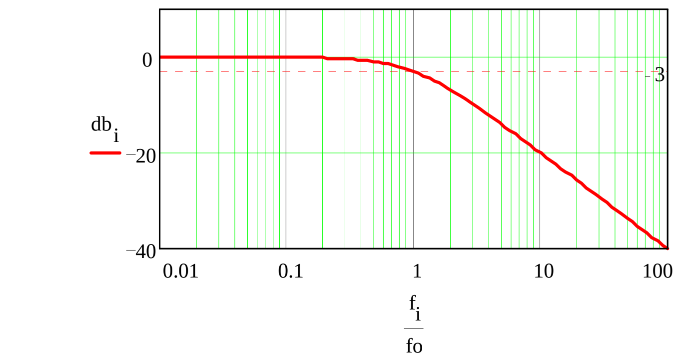
Gain (db)	-60	-40	-20	-6	-3	0	3	6	20	40	60
Gain (linéaire)	0,001	0,01	0,1	0,5	0,707	1	1,41	2	10	100	1000

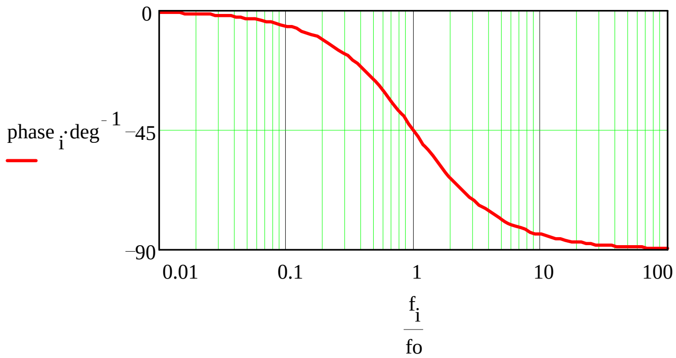
Filtre passe-bas du premier ordre

Le filtre passe-bas du premier ordre est défini par la fonction de transfert suivante :

$$\boxed{FT_{lp1}(f) \equiv \frac{1}{j\left(\frac{f}{f_o}\right)+1}}$$

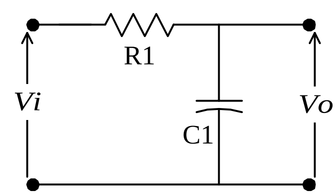
où « f_o » est la fréquence de coupure (ou du pôle).





Circuit RC

L'implantation du filtre du premier ordre s'effectue à l'aide d'un simple circuit RC :

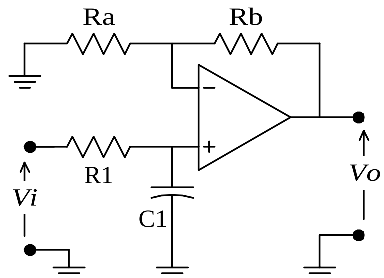


La fréquence de coupure correspond à :

$$\boxed{f_o = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}}$$

Ajout d'un gain

Si l'on veut ajouter un gain au filtre de premier ordre, on peut choisir l'un ou l'autre des montages suivants :

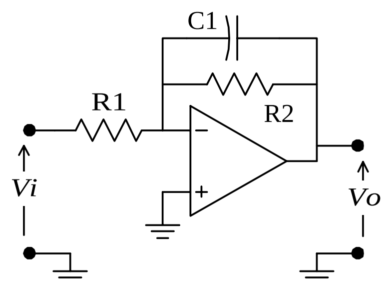


Le gain statique ($f << f_o$) :

$$\boxed{K = 1 + \frac{Rb}{Ra}}$$

La fréquence de coupure :

$$\boxed{f_o =: \frac{1}{2\pi R_1 C_1}}$$



Le gain statique ($f << f_o$) :

$$\boxed{K = -\frac{R_2}{R_1}} \text{ (inverseur)}$$

La fréquence de coupure :

$$\boxed{f_o =: \frac{1}{2\pi R_2 C_1}}$$

Filtre passe-bas du second ordre

Le filtre passe-bas du second ordre est défini par la fonction de transfert suivante :

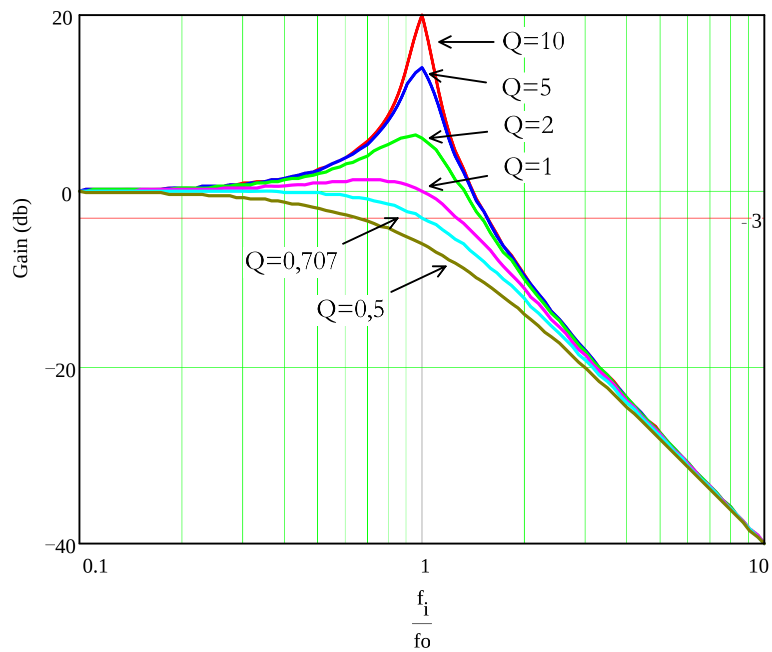
$$\boxed{FT_{lp2}(f) \equiv \frac{1}{j^2\left(\frac{f}{f_o}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\left(\frac{f}{f_o}\right) + 1}}$$

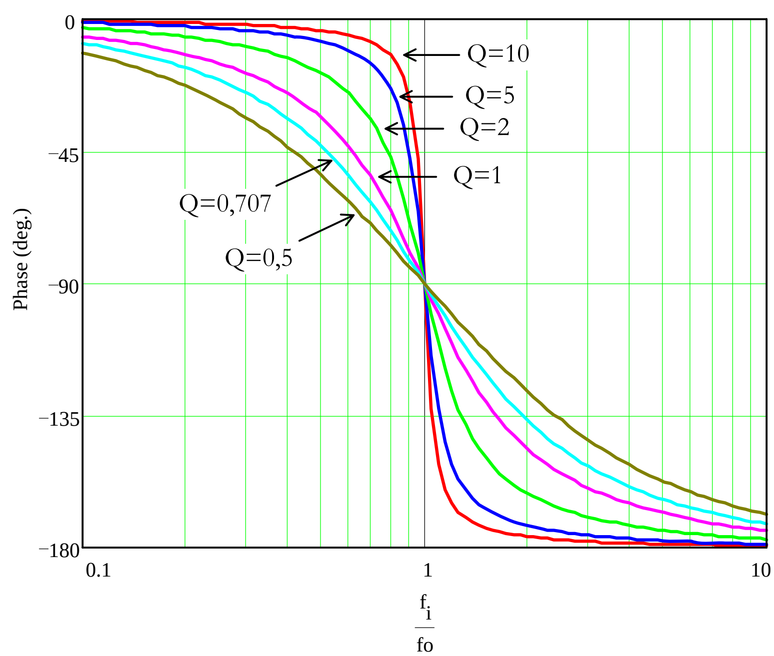
Les paramètres « f_o » et « Q » sont respectivement la fréquence du pôle et le facteur de qualité.

Le facteur « Q » influence la forme du coude de la réponse en fréquence. Un facteur Q de 0,5 correspond à la mise en cascade de deux circuits RC identiques et séparés par un suiveur.

Pour des facteurs « Q » supérieurs à 0,707 ($> \sqrt{2}/2$), il existe une fréquence pour laquelle le gain est maximal. On dit alors qu'il existe une *pseudo-résonnance*. La fréquence (f_{gmax}) et le gain (G_{max}) de cette pseudo-résonnance sont :

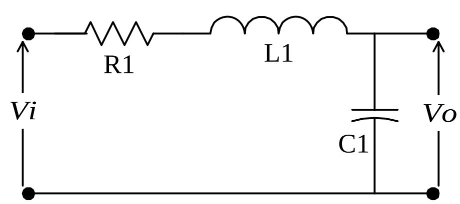
$$f_{gmax} = f_o \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{et} \quad G_{max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$





Circuit RLC

L'implantation passive du filtre du second ordre s'effectue à l'aide d'un simple circuit RLC :

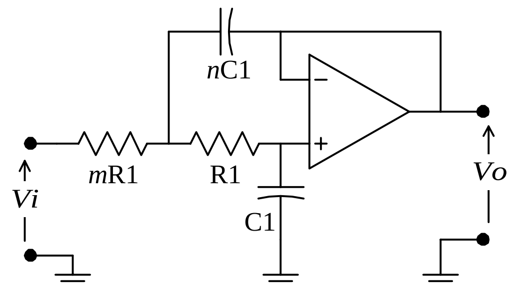


$$\boxed{f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}}$$

Montage Sallen-Key

L'implantation active du filtre second ordre se fait à l'aide d'un montage avec amplificateur opérationnel. Parmi les montages les plus courants, on trouve la topologie Sallen-Key illustrée à la figure suivante :

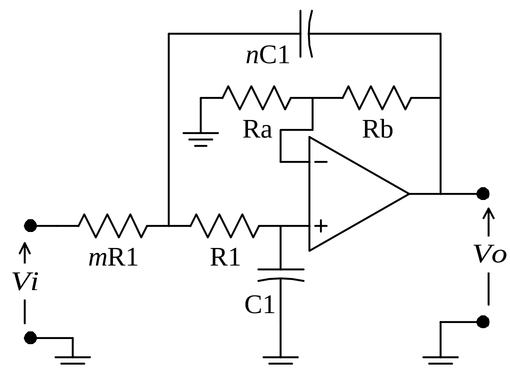


$$\boxed{f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{mn} \cdot R_1 C_1}}$$

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{mn}}{m+1}}$$

Ajout d'un gain

Si l'on veut ajouter un gain au filtre actif du second ordre, on peut choisir l'un ou l'autre des montages suivants :



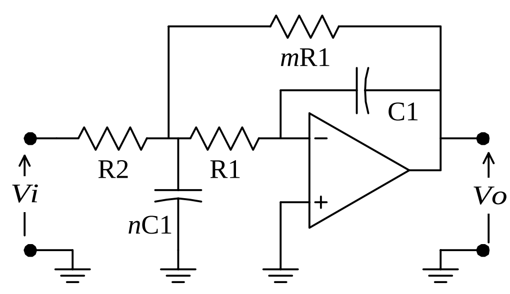
Gain statique « *K* » pour $f \ll f_o$:

$$\boxed{K = 1 + \frac{Rb}{Ra}}$$ (non-inverseur)

$$\boxed{f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{mn} \cdot R_1 C_1}}$$

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{mn}}{m+1+mn(1-K)}}$$

<u>Note :</u> Pour le montage ci-dessus, il est possible d'obtenir un facteur de qualité « *Q* » nul ou négatif ce qui correspondrait à un circuit instable.



Gain statique « *K* » pour $f \ll f_o$:

$$\boxed{K = -\frac{mR_1}{R_2}}$$ (inverseur)

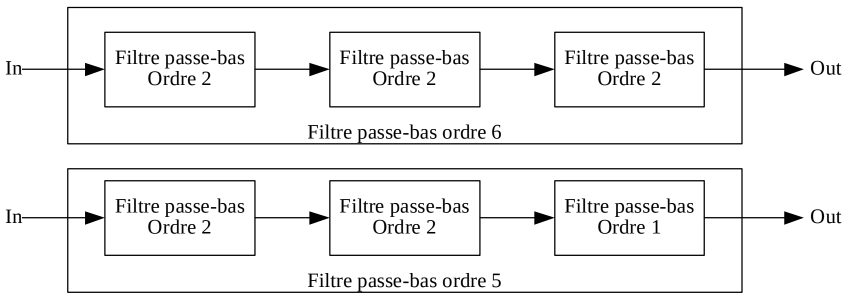
$$\boxed{f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{mn} \cdot R_1 C_1}}$$

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{mn}}{1-K}}$$

<u>Note :</u> Pour le montage ci-dessus, la valeur de « K » est normalement négative ce qui signifie que le facteur de qualité « Q » est toujours positif.

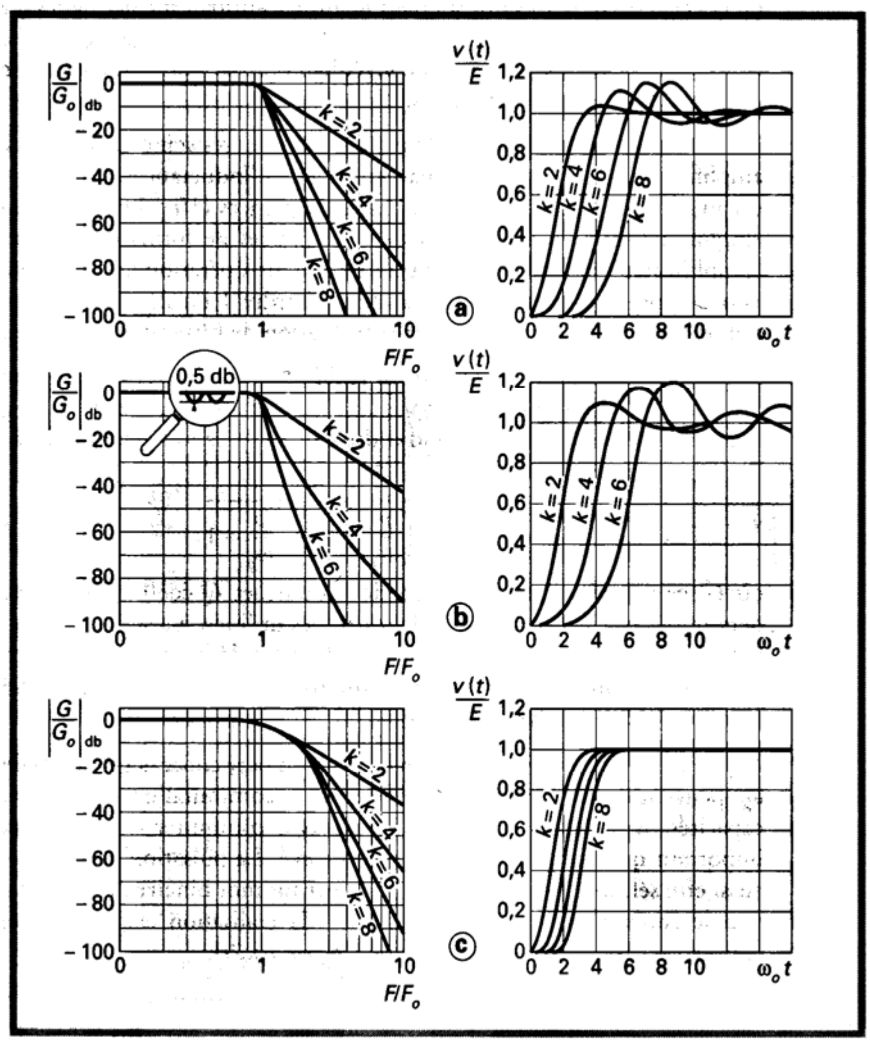
Filtres passe-bas d'ordres supérieurs

Les filtres passe-bas d'ordres supérieurs sont réalisés par la mise en cascade de filtres du second ordre et de premier ordre. Ainsi, pour un filtre d'ordre « n » pair (2, 4, 6, 8 etc.), on utilise une cascade de « n/2 » filtres du second ordre. En contrepartie, pour un filtre d'ordre « n » impair (3, 5, 7, 9 etc.), on utilise « $(n-1)/2$ » filtres du second ordre en cascade suivie d'un filtre du premier ordre. La figure ci-contre montre la structure d'un filtre passe-bas d'ordre 6 et un autre d'ordre 5.



Il existe plusieurs types de caractéristiques d'ordres supérieurs correspondant à des agencements particuliers de filtres du second ordre (choix stratégique des coupures « fo » et facteurs « Q »). On distingue 3 principales caractéristiques: Butterworth, Chebyshev et Bessel. La figure ci-contre illustre ces types.

La première, Butterworth, est optimisée pour une bande passante la plate possible. Pour sa part, la caractéristique Chebyshev met à profit les pentes accentuées des filtres du second ordre à fort « Q » pour produire des débuts de zone de coupure plus raides. Enfin, la caractéristique Bessel est plutôt optimisée pour des signaux digitaux en ne produisant pas d'oscillation à la réponse à l'échelon. Ces caractéristiques sont détaillées dans les sections suivantes.



- Réponses normalisées des principaux types de filtres passe-bas en fonction de la fréquence (signal sinusoïdal) et en fonction du temps (signal échelon d'amplitude E).
a) Butterworth; b) Chebychev (ondulation 0,5 db); c) Bessel.

La caractéristique Butterworth

La caractéristique Butterworth est probablement la plus couramment utilisée pour le filtrage des signaux. Cette caractéristique est dite la plus « plate » en fréquence (en anglais « flatness »). Les paramètres de ce type de filtre sont organisés de façon à obtenir le gain le plus constant possible aux basses fréquences et une atténuation de -3db à la fréquence de coupure et ce pour n'importe quel ordre de filtre. La figure suivante montre une telle caractéristique pour différents ordres de filtre. La première partie du graphe donne l'allure du coude à la fréquence de coupure et la seconde partie, la pente en zone de coupure.

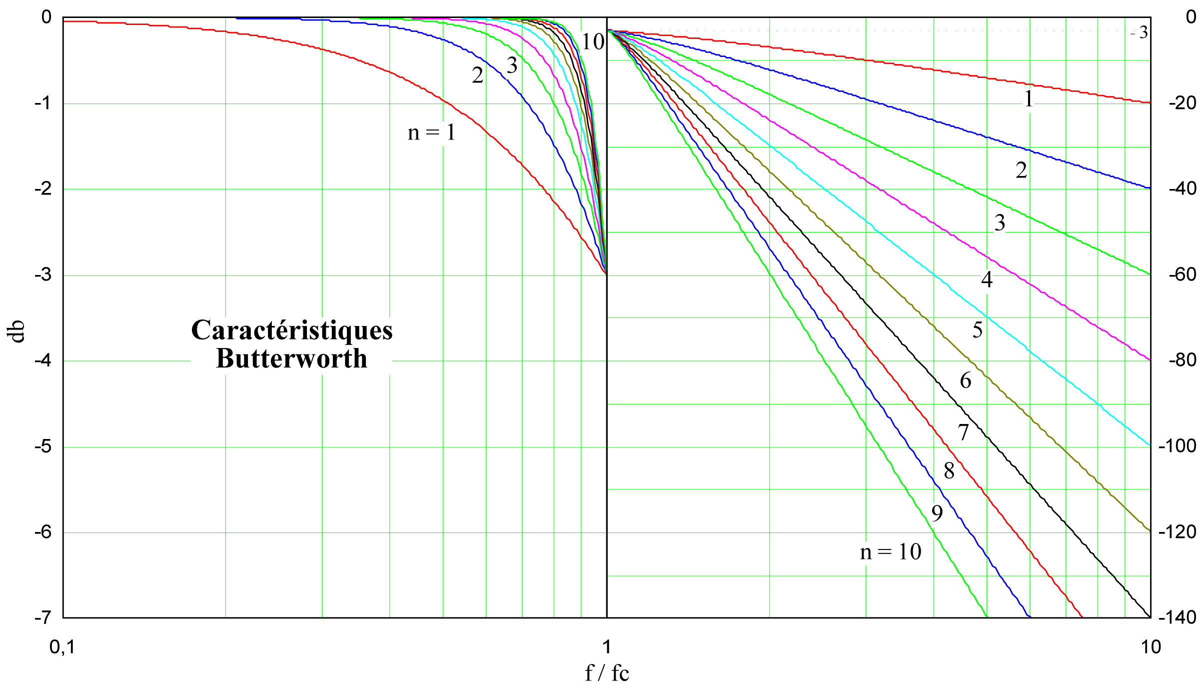


Tableau des valeurs des étages cascades de filtres de 2^e^ ordre et de 1^er^ ordre formant des filtres d'ordre « n » avec une caractéristique Butterworth pour fc=f_{3db} =1Hz

n	*fp₁*	*Q₁*	*fp₂*	*Q₂*	*fp₃*	*Q₃*	*fp₄*	*Q₄*	*fp₅*	*Q₅*	att. 2fc (db)	att. 2fc (lin.)
2	1,000	0,707									12,30	4,12
3	1,000	1,000	1,000								18,13	8,06
4	1,000	0,541	1,000	1,307							24,10	16,03
5	1,000	0,618	1,000	1,618	1,000						30,11	32,01
6	1,000	0,518	1,000	0,707	1,000	1,932					36,13	64,02
7	1,000	0,555	1,000	0,802	1,000	2,247	1,000				42,15	128,0
8	1,000	0,510	1,000	0,601	1,000	0,900	1,000	2,563			48,16	255,9
9	1,000	0,532	1,000	0,653	1,000	1,000	1,000	2,879	1,000		54,19	512,0
10	1,000	0,506	1,000	0,561	1,000	0,707	1,000	1,101	1,000	3,197	60,21	1024

La caractéristique Bessel

La caractéristique Bessel est optimisée pour la phase. En effet, cette caractéristique permet d'obtenir un déphasage pratiquement linéaire pour les fréquences à l'intérieur de la bande passante. La linéarité de la courbe de phase réduit la déformation des ondes complexes contenant beaucoup d'harmoniques comme par exemple les ondes carrées. Contrairement aux filtres de type Butterworth, les filtres de type Bessel démontrent une réponse aux ondes carrées qui ne contiennent pas de résonance « ringing ». En contrepartie, les filtres de type Bessel ont des coupures en fréquence beaucoup moins raides que le type Butterworth ; souvent, il faudra ajouter un ou plusieurs ordres supplémentaires pour obtenir la même efficacité en atténuation.

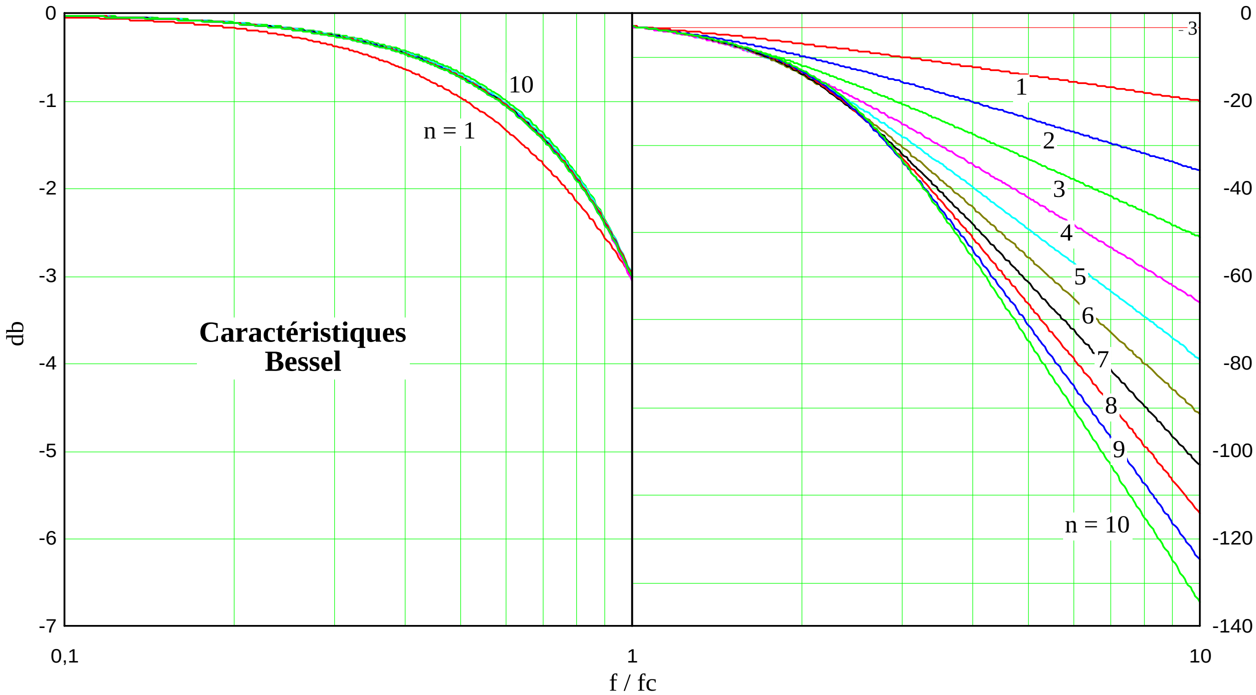
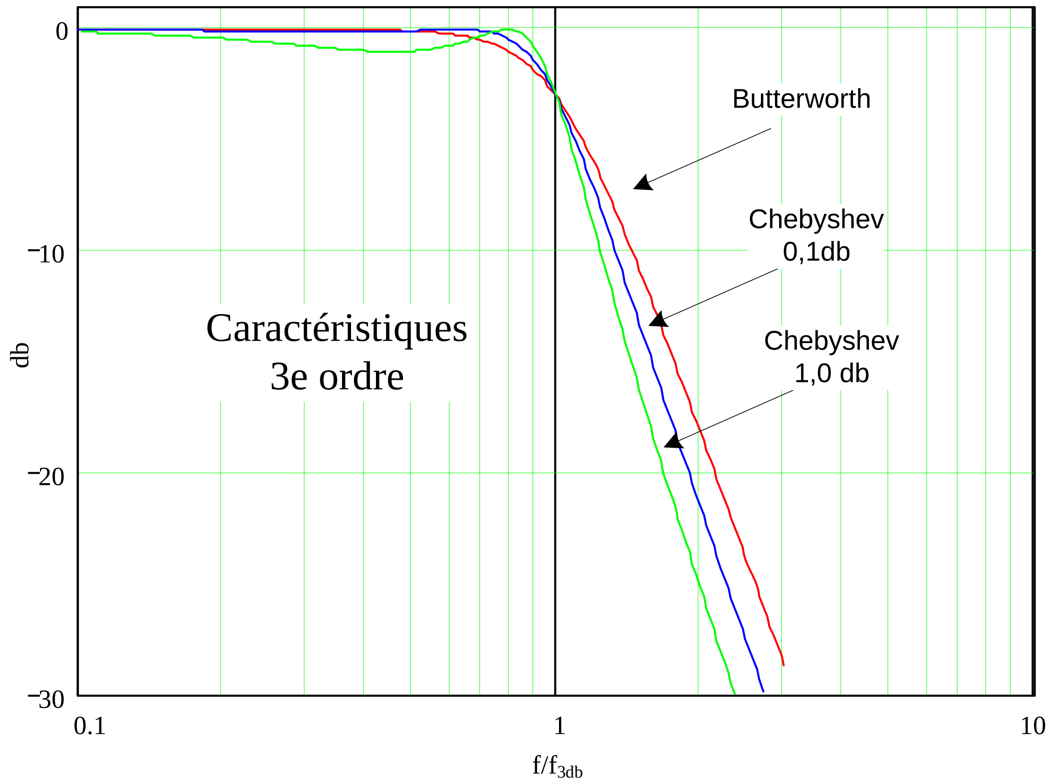


Tableau des valeurs des étages cascades de filtres de 2^{e} ordre et de 1er ordre formant des filtres d'ordre « n » avec une caractéristique Bessel avec une fréquence de coupure « $fc=f_{3db}$ » normalisée à 1Hz.

n	fp_1	Q_1	fp_2	Q_2	fp_3	Q_3	fp_4	Q_4	fp_5	att. 2fc (db)	att. 2fc (lin.)
2	1,2736	0,5773								9,80	3,09
3	1,4524	0,6910	1,3270							11,94	3,95
4	1,4192	0,5219	1,5912	0,8055						13,60	4,78
5	1,5611	0,5635	1,7607	0,9165	1,5069					13,97	5,00
6	1,6060	0,5103	1,6913	0,6112	1,9071	1,0234				14,13	5,09
7	1,7174	0,5324	1,8235	0,6608	2,0507	1,1262	1,6853			13,96	4,99
8	1,7838	0,5060	2,1953	1,2258	1,9591	0,7109	1,8376	0,5596		13,58	4,77
9	1,8794	0,5197	1,9488	0,5894	2,0815	0,7606	2,3235	1,3220	1,8575	13,37	4,66

La caractéristique Chebyshev

Les filtres de type Chebyshev ont pour but d'améliorer la décroissance du gain aux fréquences immédiatement supérieures à la coupure. Cette accentuation de la coupure est cependant produite au détriment d'un gain non constant (*ripple*) dans la bande passante. Règle générale, plus on accepte une grande variation de gain dans la bande passante, plus on obtient une décroissance rapide au voisinage de la fréquence de coupure. La figure suivante compare les réponses en fréquence des filtres Chebyshev et Butterworth du troisième ordre.



Les tableaux suivants donnent les paramètres des filtres de premier et second ordres qu'il faut mettre en cascade afin d'obtenir la caractéristique Chebyshev pour des ordres supérieurs. Contrairement aux filtres de type Butterworth, la caractéristique Chebyshev s'obtient par une cascade d'étages de filtre passe-bas 1^er^ et 2^e^ ordre ayant leur fréquence de pôle propre « f_p » à des valeurs différentes (inférieures) à la coupure recherchée « f_{3db} » recherchée.

Tableau des valeurs des étages cascades de filtres de 2^e ordre et de 1^er ordre formant des filtres d'ordre « n » avec une caractéristique Chebyshev à <u>0,1db</u> d'ondulation pour « f_{3db}=1Hz »

n	*fp*₁	*Q*₁	*fp*₂	*Q*₂	*fp*₃	*Q*₃	*fp*₄	*Q*₄	*fp*₅	att. $2f_{3db}$ (db)	att. $2f_{3db}$ (lin.)
2	0,9276	0,7673								13,3	4,6
3	0,9359	1,3408	0,6979							21,5	11,9
4	0,9481	2,1834	0,6488	0,6171						31,0	35,3
5	0,7027	0,9145	0,9634	3,2812	0,4749					41,1	113
6	0,4689	0,5995	0,7626	1,3299	0,9711	4,6286				51,5	374,1
7	0,5380	0,8464	0,8126	1,8469	0,9787	6,2335	0,3528			62,3	1,30K
8	0,3625	0,5932	0,6128	1,1821	0,8491	2,4511	0,9823	8,0755		73,1	4,55K
9	0,4310	0,8219	0,6776	1,5854	0,8775	3,1450	0,9864	10,178	0,2790	84,2	16,2K

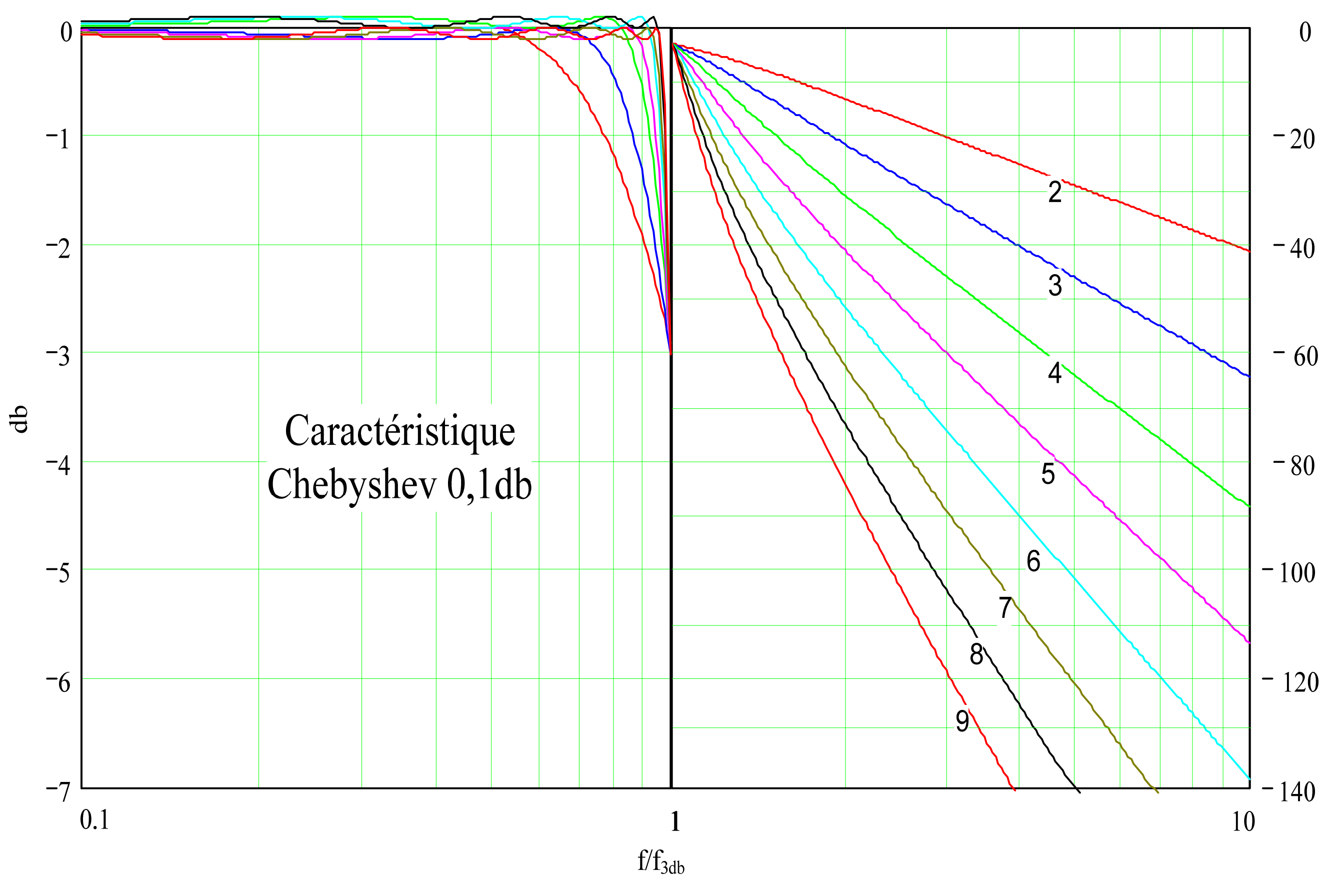
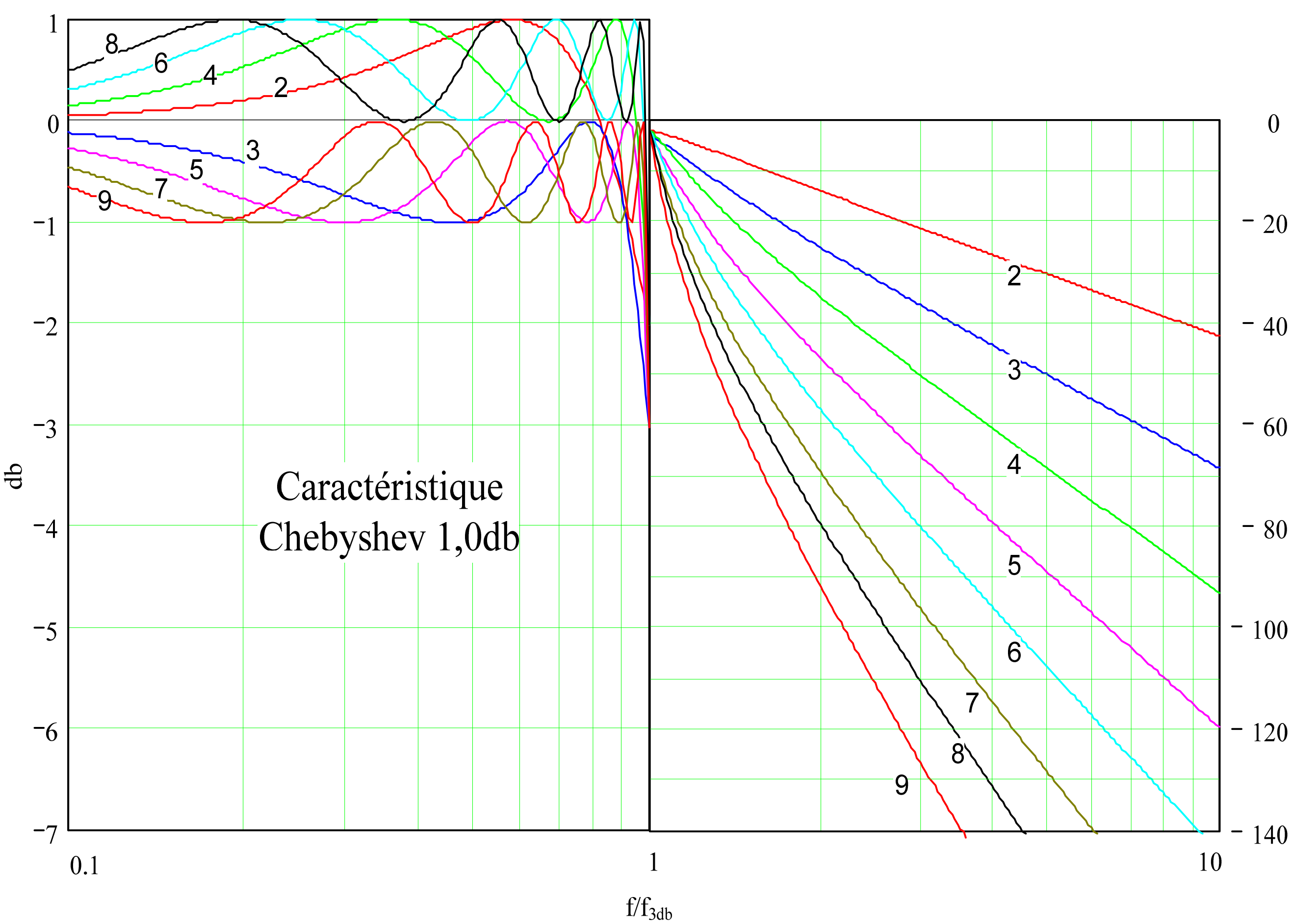


Tableau des valeurs des étages cascades de filtres de 2^e^ ordre et de 1^er^ ordre formant des filtres d'ordre « n » avec une caractéristique Chebyshev à 1,0db d'ondulation pour « f_{3db}=1Hz »

n	fo_1	Q_1	fo_2	Q_2	fo_3	Q_3	fo_4	Q_4	fo_5	att. $2f_{3db}$ (db)	att. $2f_{3db}$ (lin.)
2	0,8028	0,9564								15,30	5,82
3	0,9106	2,0173	0,4513							25,14	18,06
4	0,4932	0,7845	0,9267	3,4971						35,62	60,42
5	0,6337	1,3988	0,9614	5,5559	0,2800					46,97	223,2
6	0,3422	0,7608	0,7236	2,1795	0,9644	7,9364				57,64	761,7
7	0,4719	1,2971	0,7946	3,1558	0,9795	10,898	0,2019			69,38	2945
8	0,2603	0,7530	0,5734	1,9464	0,8354	4,2448	0,9794	14,169		80,07	10,08K
9	0,3734	1,2597	0,6554	2,7129	0,8715	5,5268	0,9873	18,023	0,1577	92,00	39,80K



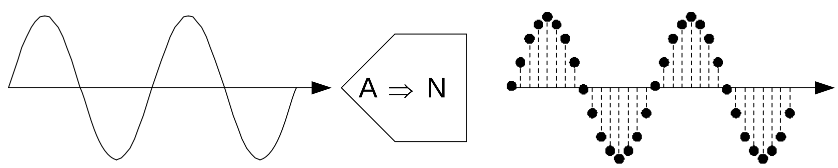
Filtres anti-alias

Cette section a pour objectif de montrer une façon de concevoir des filtres passe-bas anti-alias utilisés dans des applications de conversion analogue à numérique. Les éléments de contenu sont :

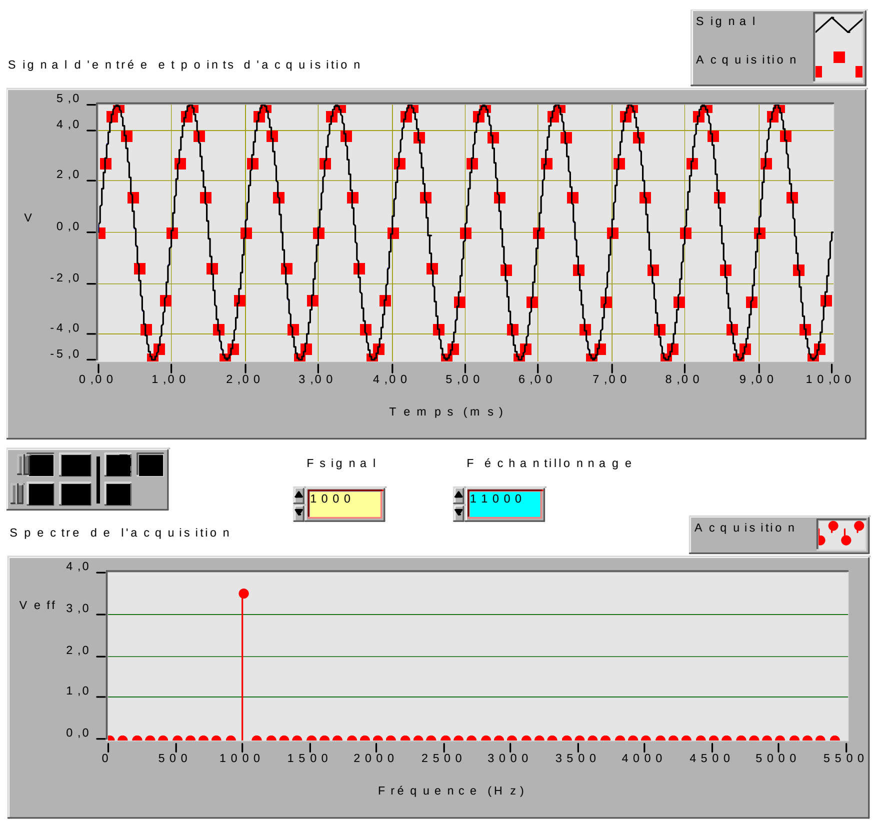
- la notion d'alias,
- design de filtres anti-alias.

La notion d'alias

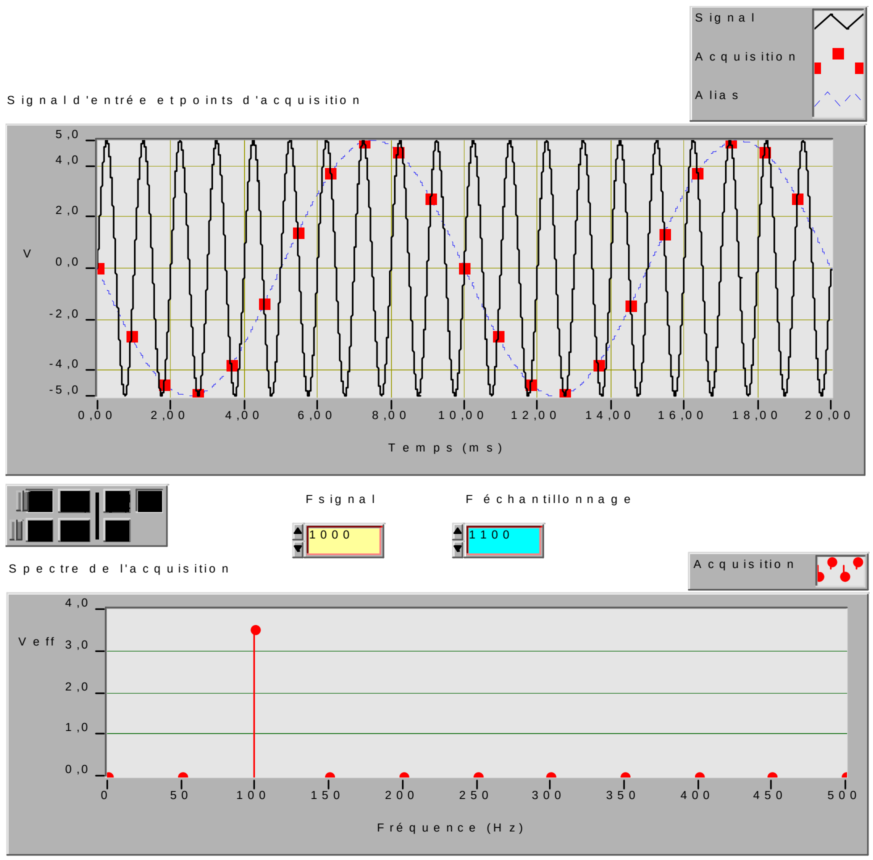
Lors d'un processus d'acquisition de données, le signal d'entrée est converti en une série de valeurs prises habituellement à rythme régulier (fréquence d'échantillonnage). On peut reconnaître adéquatement le signal d'entrée si la fréquence d'échantillonnage est plusieurs fois, en pratique au moins 10 fois, celle de l'entrée.



Signal d'entrée   Signal échantillonné



Si la fréquence d'échantillonnage est inférieure au double de celle de l'entrée alors les valeurs échantillonnées démontrent des composantes harmoniques qui n'appartiennent pas au signal d'entrée. Ces nouvelles harmoniques sont appelées « alias ». La figure suivante montre un signal d'entrée de 1kHz que l'on échantillonne à une fréquence de 1,1kHz. Le spectre du signal converti démontre une fréquence alias de 100Hz qui n'appartient absolument pas à l'entrée.



La condition essentielle pour éviter la formation d'alias est :

La fréquence d'échantillonnage doit être au moins le double de celle de l'harmonique de plus haute fréquence du signal d'entrée.

Ou, si l'on préfère :

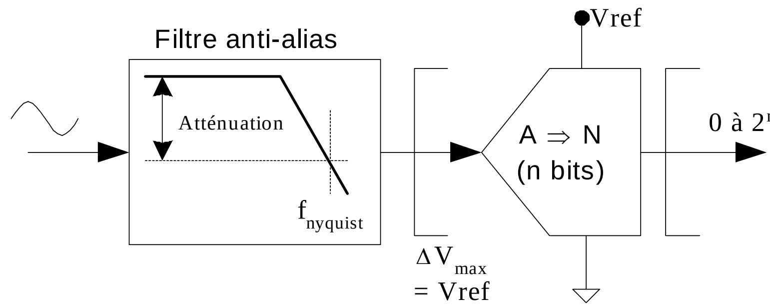
Le signal d'entrée ne doit pas contenir d'harmonique de fréquence supérieure ou égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

On appelle « *fréquence de Nyquist* » la fréquence correspondante à moitié de celle de l'échantillonnage.

$$f_{nyquist} = \frac{1}{2} f_{sampling}$$

Design de filtres anti-alias.

L'utilisation d'un filtre passe-bas à l'entrée du convertisseur analogue à numérique est le moyen le plus couramment employé pour éviter la formation d'alias. Le filtre doit être conçu de façon à réduire toutes les harmoniques de fréquence supérieure à la fréquence Nyquist à un niveau plus faible que le quanta (résolution) du convertisseur.



$$Atténuation(db)\Big|_{f=fnyquist} \geq 20 \cdot Log_{10}\left(\frac{Vref}{quanta}\right)$$

Or, puisque le quanta du convertisseur dépend du nombre de bits, on obtient donc :

$quanta = \dfrac{Vref}{2^n}$ où « n » est le nombre de bits du convertisseur.

$$\Rightarrow Atténuation(db)\Big|_{f=fnyquist} \geq 20 \cdot Log_{10}\left(2^n\right)$$
$$\geq 6{,}02 \cdot n$$

En pratique, on ajoute une marge de sécurité supplémentaire tout comme il est fait par le logiciel *FilterLab* qui utilise plutôt la relation suivante :

$$\boxed{\Rightarrow Atténuation(db)\Big|_{f=fnyquist} \geq 6{,}02 \cdot n + 1{,}76}$$

où 1,76db correspond ni plus ni moins à une marge de sécurité d'environ 20% sur l'atténuation nécessaire.

Exemple1: *Filtre anti-alias pour convertisseur 8 bits*

On désire faire l'acquisition d'un certain signal avec une bande passante de 1kHz à l'aide un convertisseur A/N de 8 bits dont la fréquence d'échantillonnage est 10kHz. Déterminez l'ordre minimal nécessaire d'un filtre passe-bas de type Butterworth afin d'éviter la formation d'alias.

Solution :

Puisque l'échantillonnage s'effectue à 10kHz alors la *fréquence Nyquist* est de 5kHz. L'atténuation nécessaire à cette fréquence est de :

$$\Rightarrow Atténuation(db)\Big|_{f=5kHz} \geq 6{,}02 \cdot n + 1{,}76 = 50db$$

Étant donné que l'on veut une bande passante de 1kHz, il faut alors trouver l'ordre du filtre qui fasse en sorte d'obtenir une atténuation de 50db ou plus pour un rapport « f/f_{3db} » de seulement 5.

À l'aide du programme « Filtres passe-bas ordre superieur.vi » on détermine qu'il faut un filtre **Butterworth d'ordre 4** . Ce dernier permet d'obtenir une atténuation de 55,9 db à 5 fois la fréquence de coupure.

Note : L'utilisation d'un filtre passe-bas « Chebyshev 1,0db » permettrait de réduire l'ordre à 3 au lieu de 4.

Exercice :

Répétez l'exemple 1 s'il s'agit d'un convertisseur 12 bits au lieu de 8bits.

Rép. : Butteworth ordre 6 ou Chebyshev 1,0db ordre 5.

Exercice :

Répétez l'exemple 1 s'il s'agit d'un convertisseur 12 bits au lieu de 8bits et si la fréquence d'échantillonnage est réduite à 5kHz au lieu de 10kHz. On désire conserver la bande passante du signal d'entrée.

Rép. : Butteworth ordre 10 ou Chebyshev 1,0db ordre 7.

Exercice :

Si pour l'exemple 1 on utilise seulement qu'un filtre de premier ordre (simple circuit RC), alors à quelle fréquence devrions-nous réduire la bande passante afin d'éviter la formation d'alias ?

Rép. : environ 16Hz seulement !!!